

Title	k log n決定性領域を必要とする問題(計算機科学の基礎理論)
Author(s)	岩田, 茂樹; 笠井, 琢美
Citation	数理解析研究所講究録 (1984), 522: 77-89
Issue Date	1984-05
URL	http://hdl.handle.net/2433/98475
Right	
Type	Departmental Bulletin Paper
Textversion	publisher

$k \log n$ 決定性領域を必要とする問題

東海大学 岩田茂樹 (Shigeki Iwata)

電気通信大学 笠井琢美 (Takumi Kasai)

1. はじめに

問題の複雑さが tight な下限をもつようなものは、そう多く見つかっているわけではない。決定性多項式時間で解ける問題のうち、ある 2 人ゲームに関する先手必勝問題は $\Omega(n^k)$ 時間必要とすること [1] や、非決定性対数領域に属する問題のうち $k \log n$ 非決定性領域を必要とするような自然な問題が見つかっている [5]。これらはいずれも “石おきゲーム” [4] の概念を利用している。

本稿では finite transducer に関する問題を考え、その問題が $k \log n$ 決定性領域を必要とすること、すなわち、2 個のテープ記号の決定性チューリングマシンで $k \log n$ 以下の領域では解けないことを示す。

Hong [2] は決定性領域で、 $O(n)$ で解けるが、 $o(n)$ では解けないような問題を構成した。本稿で考える問題 (FSTP_k)

は、決定性領域で、任意の $\varepsilon > 0$ について、 $(k+\varepsilon) \log n$ で解けるが、 $(k-4-\varepsilon) \log n$ では解けないことを示す。

2. 準備

本稿で使用する計算モデルは決定性のチューリングマシンで、2方向読込専用入力テープと1本の記憶テープからなる。記憶テープのテープ記号は特にことわらない限り $\{0, 1\}$ とする。計算のはじめは記憶テープのすべてのセルはすべて0とする。また、2個のテープヘッドは、決められた領域の外側に出ることはないと仮定する。本稿を通じて、 $\Sigma = \{0, 1\}$ とし、 $|w|$ は系列 w の長さ、 $\lceil a \rceil$ は a より大きいか等しい最小の数を表わすものとし、すべての対数の底を2とする。

長さ n の入力に対し、記憶テープの $S(n)$ セルしか使用しなければ、チューリングマシン M は $S(n)$ 領域で計算する という。 $L \subseteq \Sigma^*$ について、 L が $S(n)$ 領域で計算するチューリングマシンにより受理されるならば、 L は $S(n)$ 領域で解ける という。

$DSPACE_2(S(n))$ を $S(n)$ 領域で解ける言語のクラスとする。

定義 $L \subseteq \Sigma^*$ を Σ 上の 問題 という。問題 L を受理するチューリングマシンの計算に要する領域が、長さ n の無限に多くの入力について $S(n)$ 領域を越えるとき、 L は $S(n)$ 領域を必要とする という。すなわち、 $\sup S'(n)/S(n) < 1$ であるどの $S'(n)$ についても、 $L \notin DSPACE_2(S'(n))$ のとき、 L は $S(n)$ 領域を必

要とする。

関数 $f: \Sigma^* \rightarrow \Sigma^*$ は、一方向書出し専用出力テープをもつチューリングマシン M が存在して、 M の入力 $w \in \Sigma^*$ に対し、記憶テープを $S(|w|)$ セルより多く使用することなしに、出力テープに $f(w)$ を出力して停止するとき、 $S(n)$ 領域計算可能であるという。

定義 S, Z を非負整数上の単調増加関数とする。 $L_1, L_2 \subseteq \Sigma^*$ について、 L_1 は L_2 に (S, Z) -reducible であるとは、 $S(n)$ 領域計算可能な関数 $f: \Sigma^* \rightarrow \Sigma^*$ が存在し、

$$(1) \quad w \in L_1 \iff f(w) \in L_2,$$

$$(2) \quad \text{任意の } w \in \Sigma^* \text{ について, } |f(w)| \leq Z(|w|)$$

を満たすときをいう。

次の補助定理は、Seiferas [6] の証明と同じ手法により証明される。

補助定理 2.1 $L \subseteq \Sigma^*$ は、テープ記号 $\{0, 1, \#\}$ 、 $\#$ は記憶テープ上に高々 k 個しかあらわれないような $S(n)$ 領域限定チューリングマシンにより受理されるとする。このとき L はテープ記号 $\{0, 1\}$ のチューリングマシンにより

$$S(n) + (2k+2) \lceil \log S(n) \rceil$$

領域で受理される。

次の補助定理は、Jones [3] と補助定理 2.1 よりえられる。

補助定理 2.2 $L_1, L_2 \subseteq \Sigma^*$ とする。 L_1 が L_2 に (S, Z) -reducible で L_2 が $S_2(n)$ 領域で解けるならば, L_1 は

$$\hat{S}(n) + 16 \lceil \log \hat{S}(n) \rceil$$

領域で解ける。ただし, $\hat{S}(n) = S_2(Z(n)) + 2 \lceil \log Z(n) \rceil + S(n)$.

3. $k \log n$ 決定性領域を必要とする問題

finite state transducer の問題を考える。 finite state transducer は 5 項組 $(K, \Gamma, \Delta, \delta, p_0)$ で K, Γ, Δ はそれぞれ, 状態, 入力アルファベット, 出力アルファベット である。 δ は $K \times \Gamma$ から $K \times \Delta$ への写像であり next move function という。 p_0 は 初期状態 である。 $\delta(q, a) = (p, b)$ は, S が状態 q で入力記号 a を読むと, 状態 p に行き出力記号 b を出力することをあらわす。 S は決定性であることに注意する。

δ を $K \times \Gamma^*$ からの関数になるように次のように拡張する。

- (1) $\delta(q, \lambda) = (q, \lambda)$, ただし λ は空系列をあらわす。
- (2) ある p' について $\delta(q, x) = (p', w)$, $\delta(p', a) = (p, b)$ ならば, $\delta(q, xa) = (p, wb)$ 。ただし, $x \in \Gamma^*$, $a \in \Gamma$, $w \in \Delta^*$, $b \in \Delta$ 。

$\Gamma = \Delta$ とする。 $w \in \Gamma^*$, $q \in K$ とする。 j -fold δ 関数 $\delta^{(j)}$ は $K \times \Gamma^*$ から $K \times \Gamma^*$ への関数で,

$$\begin{cases} \delta^{(j)}(q, w) = \delta(\delta^{(j-1)}(q, w)) & j > 0 \\ \delta^{(0)}(q, w) = (q, w) \end{cases}$$

をみたす。

長さ k の finite state transducer の問題 ($FSTP_k$) とは,

入力: $S = (K, \Gamma, \Gamma, \delta, p_0)$, $a, b \in \Gamma$

決定すること: ある整数 j と $p \in K$ が存在して,

$$\delta^{(j)}(p_0, a^k) = (p, b^k)$$

となるかどうか。

定理 3.1 $L \subseteq \Sigma^*$, $L \in DSPACE_2(k \log n)$ とする。このとき, 定数 c が存在して任意の $\varepsilon > 0$ について, L は $FSTP_{k+1}$ に $((1+\varepsilon) \log n, cn \log^2 n)$ -reducible である。

証明 L を受理する $k \log n$ 領域限定チューリングマシンを M とする。 M の状態集合を Q , Σ を入力記号の集合とテープ記号の集合とする。 q_s, q_f をそれぞれ初期状態, ただ一つの受理状態とする。 M の next state function は $Q \times \Sigma \times \Sigma \times Q \times \{L, R, S\} \times (\Sigma \times \{L, R, S\})$ の要素であらわすことにし, M の instruction ということにする。instruction $r = (q, \sigma, \eta, q', d, (\eta', d_w))$ は, M が状態 q で, 入力記号 σ , テープ記号 η を読むと, 状態 q' に移り, 入力テープと記憶テープのヘッドをそれぞれ d, d_w に移動することを意味する。

この証明を通して $m = \lceil \log n \rceil$ とする。記憶テープの領域 $k \log n$ を長さ $\log n$ の k 個のブロックに分割する。

M の様態を $C = (q, r, z_0 z_1 \dots z_{k-1})$ であらわす。ただし、 q は M の状態、 r は入力テープのヘッドの位置、 $0 \leq r < n$ 、 z_i は記憶テープの i 番目のブロックの内容とヘッドの位置をあらわす。すなわち、記憶テープのヘッドが u 番目のブロックの v 番目のセル上にあるならば、 $i \in \{0, 1, \dots, k-1\} - \{u\}$ については $z_i \in \Sigma^m$ 、また $z_u \in \Sigma^v \uparrow \Sigma^{m-v}$ である。

M の 2 本のテープのヘッドの位置と記憶テープの内容を長さ $k+1$ の記号列 $\alpha = [z_0][z_1] \dots [z_{k-1}] \langle r \rangle$ で表わす。 $[z_0][z_1] \dots [z_{k-1}]$ は記憶テープの内容とヘッドの位置を表わす。 $[z_i]$ を 1 つの記号として扱う。 $z_i \in \Sigma^m \cup (\bigcup_{i=0}^{m-1} \Sigma^i \uparrow \Sigma^{m-i})$ である。 $\langle r \rangle$ は入力テープのヘッドの位置を表わす。 $\langle r \rangle$ も 1 つの記号として扱う。

$S_{M,x}$ の入出力アルファベット Γ を次のようにする：

$$\Gamma = \{a, b\} \cup \{\langle r \rangle \mid 0 \leq r < n\} \\ \cup \{[z] \mid z \in \Sigma^m \cup (\bigcup_{i=0}^{m-1} \Sigma^i \uparrow \Sigma^{m-i})\}$$

$S_{M,x}$ の next move function δ は次の 3 つの部分、(1) 初期化、(2) シミュレーション、(3) 後処理よりなる。 δ の図示のため、 $\delta(q, \alpha) = (p, b)$ を図 1 に示す。

(1) 初期化 α^{k+1} を $\alpha_0 = [\uparrow 0^m][0^m] \dots [0^m] \langle 0 \rangle$ に変換し、状態を q_{k+1} にするためのもので、 δ は図 2 に示す move を含むものとする。

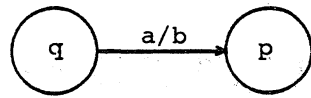


図1 An illustration of $\delta(q, a) = (p, b)$

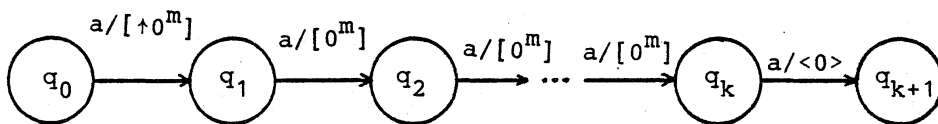


図2 Initialization part of the next move function of $S_{M,x}$

(2) シミュレーション ここでは、 M の動きをシミュレートする。 $S_{M,x}$ の状態で、 $\langle q, v_1, v_2 \rangle$ の形のものを使用する。ただし、 q は M の状態、 $v_1 \in \{p_1, p_2, r_1, \dots, r_k\}$ 、 $v_2 \in \{0, 1\} \cup \{L, R, S\}$ とする。 v_1 は補助的に使用する。 $q_{k+1} = \langle q_s, p_1, \sigma_0 \rangle$ とする。ただし、 σ_0 は M の入カテープの左端の記号(ビット)とする。

M の各 instruction $r = (q, \sigma, \eta, q', d, (\eta', d_w))$ について、 $S_{M,x}$ の next move function はすべての $w \in \Sigma^*$ 、 $z \in \bigcup_{i=0}^{m-1} \Sigma^i \uparrow \Sigma^{m-i}$ 、 h ($0 \leq h < n$) について図3に示すものを含む。ただし、 $h+d$ は r の実行後の入カテープのヘッド

の位置を表わし, σ_h は入カテープの h 番目の記号とする。

図3を参照せよ。もし r の実行後記憶テープのヘッドの位

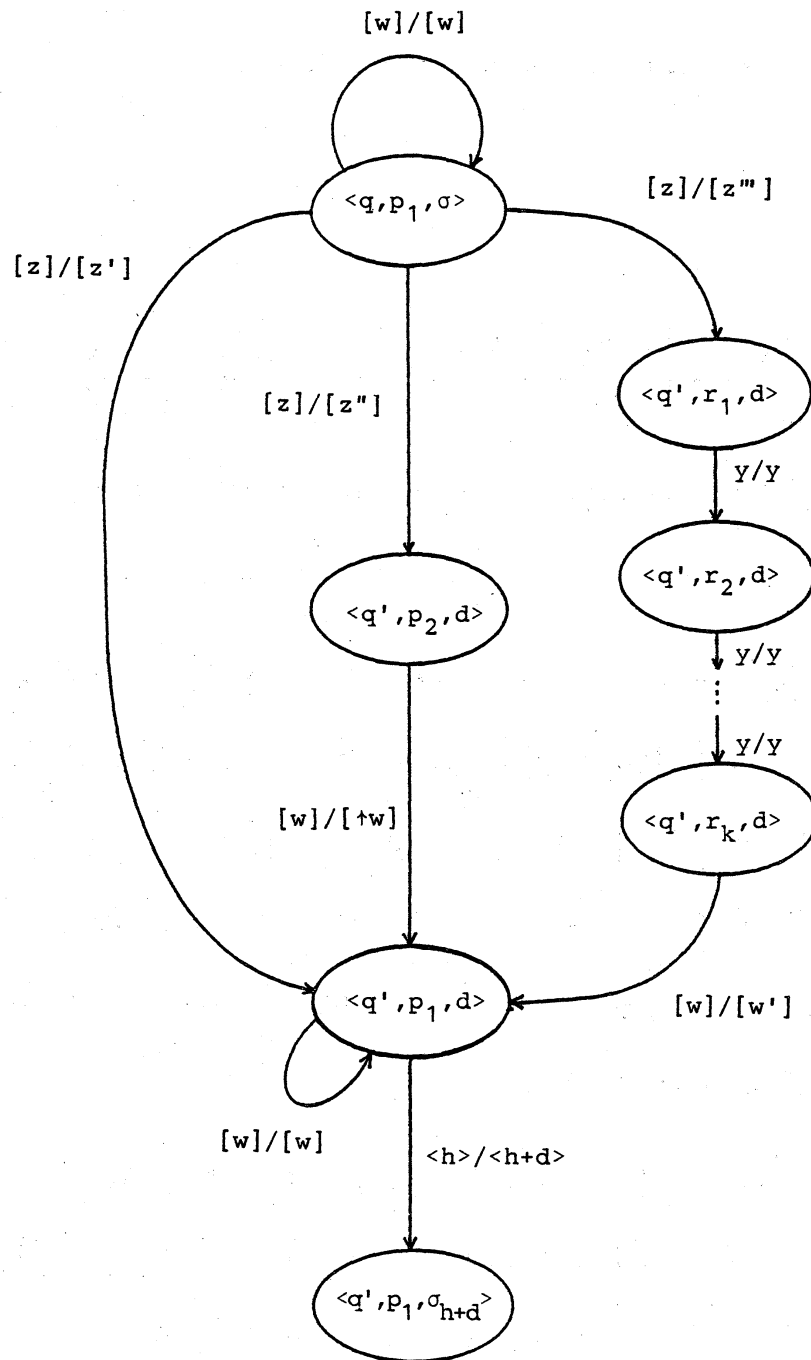


図3 Simulation part of the next move function of $S_{M,x}$

置が実行前と同じブロックであれば, δ は次を含む。

$$\delta(\langle q, p, \sigma \rangle, [z]) = (\langle q', p_1, d \rangle, [z'])$$

ただし, z' は r の実行後のそのブロックの内容とヘッドの位置をあらわす。すなわち, $z = \omega_1 \uparrow \eta \omega_2$, $\omega_1, \omega_2 \in \Sigma^{m-1}$, $\eta \in \Sigma$ ならば, z' は z の η を η' におきかえ, 更に \uparrow の位置を $d_w \in \{L, R, S\}$ により左, 右に移動したり, そのままにしてえられる記号列である。

記憶テープのヘッドの位置が r の実行後右のブロックに移るならば, δ は次を含む。

$$\delta(\langle q, p_1, \sigma \rangle, [z]) = (\langle q', p_2, d \rangle, [z''])$$

すべての $\omega \in \Sigma^m$ について

$$\delta(\langle q', p_2, d \rangle, [\omega]) = (\langle q', p_1, d \rangle, [\uparrow \omega])$$

ただし, z'' は z の右端の 2 記号 $\uparrow \eta$ を η' におきかえてえられる記号列である。

記憶テープのヘッドの位置が r の実行後左のブロックに移るならば, δ は次を含む。

$$\delta(\langle q, p_1, \sigma \rangle, [z]) = (\langle q', r_1, d \rangle, [z''']),$$

すべての i ($1 \leq i < k$),

$y \in \{[z] \mid z \in \Sigma^m \cup (\bigcup_{i=0}^{m-1} \Sigma^i \uparrow \Sigma^{m-i})\} \cup \{\langle h \rangle \mid 0 \leq h < n\}$ について

$$\delta(\langle q', r_i, d \rangle, y) = (\langle q', r_{i+1}, d \rangle, y),$$

すべての $\omega \in \Sigma^m$ について,

$$\delta(\langle q', r_k, d \rangle, [w]) = (\langle q', p_1, d \rangle, [w'])$$

ただし, z'' は z の左端の 2 記号 $\uparrow\eta$ を η' におきかえてえられる記号列で, また, $w = w_1 \xi$, $w_1 \in \Sigma^{n-1}$, $\xi \in \Sigma$ ならば $w' = w_1 \uparrow \xi$ である。

記憶テープのヘッドの位置は r の実行によって, 同じブロックにあるか, 左かまたは右のブロックに移るかのいずれかである。よって, 以上で定めた δ は決定性であることに注意する。

(3) 後処理 $S_{M,x}$ の状態が, ある $\sigma \in \Sigma$ について $\langle q_f, p_1, \sigma \rangle$ になると, b^{k+1} をつくり出すための next move function である。 δ はすべての $u \in P$ について図4に示すものを含む。

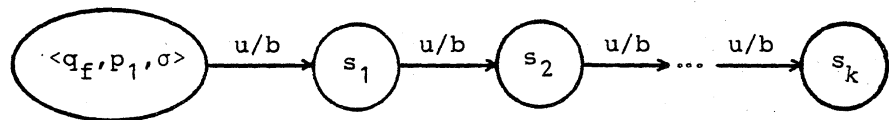


図4 Final treatment part of the next move function of $S_{M,x}$

$S_{M,x}$ の状態集合 K は, 図2, 図3, 図4にあらわれるすべての状態よりなる。

以上のように定めた $S_{M,x}$ については,

M は x を受理する \Leftrightarrow ある k が存在して $\delta^{(k)}(q_0, a^{k+1}) = (s_k, b^{k+1})$

がなりたつ。

次に $S_{M,x}$ の表現の長さとして、 M と x から $S_{M,x}$ を構成するのに要する領域量を計算する。 M の状態数は n に無関係な定数個であるので、 $S_{M,x}$ の状態数も定数個である。

$\{[z] \mid z \in \bigcup_{i=0}^{m-1} \Sigma^i \uparrow \Sigma^{m-i}\}$ の要素の数は $n \cdot m$ 個である。よって Γ 中の記号の数は、 $c_1 n \log n$ 個以下である。ただし、 c_1 は定数。 Γ の記号は任意の $\varepsilon > 0$ について長さ $(1+\varepsilon) \log n$ で表わすことができる。よって $S_{M,x}$ の長さは、定数 c が存在して、 $c n \log^2 n$ 以下で表わすことができる。

次に $S_{M,x}$ の構成に要する領域量を計算する。(1) 初期化、(3) 後処理の部分の δ を構成するには $\log n + \log \log n$ 領域でできる。(2) シミュレーションの部分の構成をするには、 z をつくり出すためのカウンタに $\log n + \log \log n$ 領域、更にそのカウンタの長さをコピーするのに $\log(\log n + \log \log n)$ 領域が必要である。よって $S_{M,x}$ の構成には、任意の $\varepsilon > 0$ について、 $(1+\varepsilon) \log n$ 領域でできる。 \square

系 $FSTP_k$ は $(k-4) \log n$ 領域を必要とする。

証明 ある $\varepsilon_1 > 0$ について、 $FSTP_{k+1}$ が $(k-3-\varepsilon_1) \log n$ 領域で解けると仮定する。前定理より、任意の $k \log n$ 領域で解ける問題 L に対して、ある定数 c が存在して、任意の $\varepsilon > 0$ について、 L は $FSTP_{k+1}$ に $((1+\varepsilon) \log n, c n \log^2 n)$ -

reducible である。補助定理 2.2 より L は $\hat{S}(n) + 16 \lceil \log \hat{S}(n) \rceil$ 領域で解ける。ただし,

$$\hat{S}(n) = \lceil (k-3-\varepsilon_1) \log (cn \log^2 n) \rceil + 2 \lceil \log (cn \log^2 n) \rceil + \lceil (1+\varepsilon) \log n \rceil.$$

すなわち, L は, 任意の $\varepsilon_2 > 0$ について, $\lceil (k+\varepsilon_2-\varepsilon_1) \log n \rceil$ で解ける。 ε_2 は任意だから, L は $k \lceil \log n \rceil$ より小さい領域で解けることになる。よって $k \log n$ 領域以下で解けるすべての問題が, $k \lceil \log n \rceil$ より小さい領域で解けることになり, 矛盾する [6]。

ゆえに, $FSTP_k$ は $(k-4) \log n$ 領域を必要とする。□

注 $FSTP_k$ は, 任意の $\varepsilon > 0$ について, $(k+\varepsilon) \log n$ 領域で解けるので, $FSTP_k$ は

$$DSPACE_2((k+\varepsilon) \log n) - DSPACE_2((k-4-\varepsilon) \log n)$$

に属する。

< 参考文献 >

- [1] A. Adachi, S. Iwata, and T. Kasai, Some combinatorial game problems require $\Omega(n^k)$ time, to appear in Journal of the ACM, 31 (1984)
- [2] J. W. Hong, On some deterministic space complexity problems, SIAM J. on Comput., 11, 591-601 (1982)
- [3] N. Jones, Space-bounded reducibility among

combinatorial problems, Journal of Comput. and Syst. Sci. 11, 68-85 (1975)

[4] T. Kasai, A. Adachi, and S. Iwata, Classes of pebble games and complete problems, SIAM J. on Comput., 8, 574-586 (1979)

[5] T. Kasai, and S. Iwata, Gradually intractable problems and nontrivial polynomial time lower bounds, Research Report, Dept. of Computer Science, University of Electro-Communications, 1983

[6] J. I. Seiferas, Relating refined space complexity classes, Journal of Comput. and Syst. Sci., 14, 100-129 (1977)